Открытая олимпиада Алтайского государственного университета
«ПОКОРИ УНИВЕРСИТЕТ»
Дистанционная олимпиада по математике «ФОРМУЛА УСПЕХА»
Заключительный тур, 09 апреля 2023 г.

Максимальная итоговая оценка – 100 баллов
Условия заданий переписывать не нужно!!! Подпишите лишь номер задачи. Далее приведите обоснованное решение (очень много слов писать не стоит, но требуется пояснить самые важные моменты). Не забудьте указать ответ. Решать задачи можно в любом порядке!

Задача 1. (*10 баллов*)
Четыре числа сложили всеми возможными способами по два и получили следующие шесть сумм: 50, 70, 100, 100, 130, 150.
В ответе запишите:
а) сумму наибольшего и наименьшего из этих четырех чисел;
б) сумму всех четырех чисел

ОТВЕТ: а) 100 б) 200
РЕШЕНИЕ: Проще начать с б). Заметим, что два самых маленьких числа дают самую маленькую сумму (50), а два самых больших – 150. Потому сумма всех четырёх даёт 200.
Далее, в 70 входит самое маленькое число и ещё одно – вторым по величине оно быть не может (они дают 50), так что это третье. Точно так же в 130 обязательно входит самое большое число и ещё одно, которое не может быть самым маленьким (иначе поменяв его на второе мы получили бы число больше 130). Потому сумма самого маленького и самого большого – обязательно одна из оставшихся сумм, которые равны 100.

Задача 2. (*10 баллов*)
Длина оснований трапеции равна 10 и 100 см. Найдите длину отрезка, параллельного основаниям, который делит трапецию на две равные по площади части.

ОТВЕТ: $\sqrt{5050}$ см.
РЕШЕНИЕ: Если взять за h1 и h2 высоты, соответственно, верхней и нижней половин трапеции, а за x – длину отрезка, то получим в силу равенства площадей, что:
(h1+h2) (10+100) = 2 (10+x) h1
(h1+h2) (10+100) = 2 (100+x) h2,
то есть, раскрыв скобки и преобразуя:
(10 +2x - 100) h1 = (10+100) h2
(100+ 2x - 10) h2 = (10+100) h1
отсюда получаем:
(10+2x + 100) (100+2x-10) h1 h2 = $(10+100)^2$ h1 h2
откуда $4x^2= (10 - 100)^2 + (10+100)^2$
или, что то же самое, $x^2 = (10^2+100^2)/2$

Задача 3. (*15 баллов*)
Найдите наименьшее значение функции: $F(x) = 10x^8 — 40x^6 + x^4 — 6x^2 + 100$

ОТВЕТ: -179
РЕШЕНИЕ: "Лобовой" способ состоит в нахождении производной, $80x^7-240x^5+4x^3-12x$, которая довольно просто раскладывается на множители: $4x(x^2-3)(x^4+20)$. Отсюда видно, что минимум может достигаться только в точках 0 или плюс-минус корень из 3. Так как функция симметрична, то достаточно сравнить значение в 0 и корне из 3. При x=0 получаем F(x) = 100. При $x^2 = 3$ получаем минус 179.
Второй способ решения – через замену $t = x^2$, который приводит к исследованию более простой функции $F(t) = 10t^4 - 40t^3 + t^2 - 6t + 100$.

Задача 4. (*15 баллов*)
На водопой в джунглях пришли 11 зверей, среди которых – Багира и Шерхан. Если эти двое окажутся рядом, то непременно загрызут друг друга. Остальные звери ведут себя на водопое сдержанно, и эти двое к ним тоже равнодушны. Водопой оказался круглым и звери вокруг него расположились случайным образом. Найти вероятность того, что все закончится благополучно!

ОТВЕТ: 0,8.
РЕШЕНИЕ: Считать можно по-разному. Самый простой способ: пусть звери занимают места по очереди. Будем считать, что Багира пришла первой. Рядом с ней два места. Если Шерхан придёт на одно из них, случится драка, если он займёт любое из оставшихся 8 – всё будет тихо. Так как Шерхан с равными шансами занимает любое из оставшихся 10, то шансы 8/10.

Задача 5. (*25 баллов*)
В «Зверском банке» Иванушка-дурачок взял кредит на сумму 123456789 рублей (на какое-то число месяцев). Согласно договору кредитования, «Зверский банк» каждый месяц начисляет 23,45% на остаток суммы, после чего Иванушка выплачивает часть долга. По плану остаток долга должен уменьшаться равномерно до нуля.
Однако герой задачи оказался был хитрым и выплачивал ежемесячно «Зверскому банку» большую сумму, при этом долг все равно уменьшался равномерно, но срок выплат сократился ровно вчетверо. На какое число месяцев изначально был оформлен кредит, если в итоге переплата уменьшилась в 3,8 раза?

ОТВЕТ: 56.
РЕШЕНИЕ: Неудобные числа сразу должны наводить на мысль, что задачу проще решать в общем виде, вводя «буковки». Пусть по плану Иванушка должен был расплатиться за 4n месяцев, а расплатился за n. По плану он разбивал сумму долга на 4n частей. Если он брал сумму S в долг и переплата была X, то в реальном случае он выплатил банку S+X за n месяцев равными платежами, в плановом – S+3,8X за 4n месяцев.
Найдет сумму начисленных процентов (т.е. переплату) в каждом случае.
Реально:

последовательность остатков долга: S, $\frac{n-1}{n}S$, …., $\frac{1}{n}S$

начисленные проценты: kS, $k\frac{n-1}{n}S$, …., $k\frac{1}{n}S$

Сумма процентов равна $kS\left(\frac{n}{n}+\frac{n-1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\frac{kS}{n}(n+(n-1)+\cdots+1)=\frac{kS}{2}(n+1)$
По плану – аналогично. Получится, что сумма процентов равна $\frac{kS}{2}(4n+1)$
По условию $\frac{kS}{2}(4n+1)=3,8\frac{kS}{2}(n+1)$

Остаётся сократить $\frac{kS}{2}$, упростить выражение и найти оттуда n. В нашем случае n=14, а так как в задаче спрашивается про начальный срок кредита =(4n), то он составлял 56 месяцев.

Задача 6. (*25 баллов*)
Ярослав написал пробное сочинение на «зверскую тему» и допустил орфографические и пунктуационные ошибки. Затем его подружка Яна проверила сочинение и исправила часть ошибок. В тексте Яны количество пунктуационных ошибок оказалось в пределах от 15,5% до 18% от числа пунктуационных ошибок в тексте Ярослава. Количество орфографических ошибок уменьшилось втрое и составило 25 % от числа пунктуационных ошибок в тексте Ярослава.

а) Может ли в тексте Яны содержаться ровно 5 ошибок?
б) Может ли в тексте Яны содержаться ровно 6 ошибок?
в) Какое наименьшее число ошибок могло содержаться в тексте Ярослава?

ОТВЕТ: а) да, б) нет, в) 12
РЕШЕНИЕ: Пусть число пунктуационных ошибок Ярослава равно p. Орфографические ошибки в тексте Яны в большинстве – 0,25p, в то время как пунктуационных от 0,155p до 0,18p. Значит, если у и у Яны будет ровно 5 ошибок, то пунктуационных у неё 1 или 2. Если она одна, то $0{,}115p < 1 < 0{,}18p$, то есть p может быть только 6, 7 и 8. Но p должно делиться на 4, потому p = 8. Однако, тогда у Яны 8/4 = 2 орфографические ошибки, и всего их 3, вместо 5.

Если у неё две пунктуационные ошибки, то p от 12 до 17, то есть или 12, или 16, и орфографических тогда 3 или 4. В первом случае у Яны будет 2 пунктуационные ошибки, которые укладываются в интервал: $12 \cdot 0{,}155 < 2 < 12 \cdot 0{,}18$, во втором - 1 пунктуационная, которая в нужный нам интервал не попадает: $16 \cdot 0{,}155 = 2{,}48 > 1$.

Если у Яны ровно 6 ошибок, то пунктуационных всё ещё меньше половины, то есть точно так же 1 или 2, после чего таким же перебором можно убедиться, что мы не попадаем в нужный интервал.

Наконец, можно убедиться, что меньше 5 ошибок у Яны быть не может: при ненулевом числе орфографических и пунктуационных ошибок Ярослава у Яны тоже должна быть минимум 1 орфографическая и 1 пунктуационная, то есть не меньше 2, а так как пунктуационных больше, то в сумме не меньше 3. Случаи с 3 и 4 ошибками у Яны разбираются аналогично тому, что показано выше. Потому случай с p=12 минимальный. В этом случае у Яны было 3 орфографических ошибки, то есть у Ярослава их было втрое больше, 9, а общее число ошибок равно 21.